http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

EXERCICES 3 B

1. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications entre ensembles. Démontrer que :
a) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;
b) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective ;
c) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
d) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

2. Trouver deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $g \circ f$ est surjective mais f n'est pas surjective.

3. Soit $f : A \to A$ une application telle que $f(f(a)) = f(a)$ pour tout $a \in A$.
Soit $\mathrm{Fix}(A) = \{a \in A \mid f(a) = a\}$. Démontrer que :
a) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Fix}(A)$;
b) f est injective si et seulement si $f(a) = a$ pour tout $a \in A$;
c) f est surjective si et seulement si $f(a) = a$ pour tout $a \in A$.

4. Soit f une application entre ensembles. Démontrer les rélations suivantes :
(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(iii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
(iv) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
(v) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;
(vi) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
Expliquer, en donnant des exemples, pourquoi on n'a pas des égalités dans (ii) et (vi).

5. Indiquer si les fonctions suivantes sont injectives et/ou surjectives :
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x$;
(ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = 2x$;
(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$;
(iv) $f : \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad f(x) = x^2$;
(v) $f : [0,1] \to [0,1]$ $\quad f(x) = \sin(x)$;
(vi) $f : [0,2] \to [0,1]$ $\quad f(x) = \sin(x)$;
(vii) $f : [0,\pi] \to [\frac{1}{2}, 2]$ $\quad f(x) = 2^{\cos(x)}$;
(viii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \cos(2^x)$.